

WALDEMAR FLORCZAK¹, ARKADIUSZ FLORCZAK²MODELOWANIE UMIERALNOŚCI W POLSCE
PRZY UŻYCIU FUNKCJI WIELOPARAMETRYCZNYCH^{3 4}

1. WPROWADZENIE

Procesy demograficzne i ekonomiczne pozostają w długookresowym łańcuchu powiązań jednoczesnych, jednakże siła ich wzajemnego oddziaływania względem siebie nie jest symetryczna. Przyjmując założenie *ceteris paribus* w stosunku do migracji zewnętrznych, uwarunkowania ekonomiczne determinują – obok innych czynników – płodność i przyczyniają się do zmian w oczekiwanej długości życia. Są to z kolei czynniki, które jedynie nieznacznie – z perspektywy powiązań symultanicznych, tj. w ciągu krótkiego okresu czasu, np. roku – wpływają na poziom zasobów demograficznych, których oddziaływanie na procesy ekonomiczne jest natychmiastowe i kluczowe, np. podaż pracy, czy współczynniki struktury demograficznej (np. Florczak, 2008). Stąd nie popelnia się nadmiernego błędu, przyjmując, iż rozwój demograficzny jest w dużym stopniu egzogeniczny względem uwarunkowań ekonomicznych. Przekonująco na ten temat pisze Reher (2011), którego zdaniem procesy demograficzne są *spiritus movens* zmian społeczno-ekonomicznych zachodzących we współczesnym świecie.

Współczesne procesy demograficzne charakteryzuje sekularnie rosnąca oczekiwana długość życia oraz (bardzo) niska płodność, co skutkuje zawężoną reprodukcją i starzeniem się społeczeństwa (np. Kotowska, 1999; Kędelski, Paradysz, 2006; Okólski, Fihel, 2012). Już obecnie oddziałują one silnie na rzeczywistość społeczno-ekonomiczną rozwiniętych krajów, a z biegiem czasu wpływ ten będzie narastał i obejmie – zgodnie z prognozami – większość państw (np. Coleman, Rowthorn, 2011). Transformacja demograficzna wymagać będzie od rządów poszczególnych państw daleko idących reform instytucjonalnych w celu neutralizacji, czy choćby osłabienia licznych niekorzystnych skutków drugiego przejścia (np. Okólski, Fihel, 2012; Lee,

¹ Uniwersytet Jagielloński, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Zakład Analiz Społeczno-Ekonomicznych, ul. Łojasiewicza 4, 30-348 Kraków, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: waldemar.florczak@uj.edu.pl.

² Narodowy Bank Polski, Departament Statystyki, ul. Świętokrzyska 11/21, 00-919 Warszawa, Polska.

³ Artykuł powstał w ramach realizacji projektu Narodowego Centrum Nauki DEC-2012/07/B/HS4/02928.

⁴ Tekst wyraża poglądy autorów, które niekoniecznie odzwierciedlają oficjalne stanowisko Narodowego Banku Polskiego.

Reher, 2011). Punktem wyjścia do opracowania adekwatnej agendy i harmonogramu takich działań powinny być rzetelne projekcje rozwoju demograficznego.

Wśród istniejących metod modelowania i prognozowania umieralności (np. Preston i inni, 2003) – drugiego obok płodności kluczowego czynnika rozwoju demograficznego – ważne miejsce zajmują modele parametryczne. Funkcje te, określane także „prawami umieralności” (ang. *mortality laws*), objaśniają zmienność prawdopodobieństw zgonu, które są zróżnicowane względem wieku i płci. Wyróżnia się przy tym dwa rodzaje praw umieralności. Pierwsze, zdezagregowane/cząstkowe, takie jak funkcja/prawo Gompertza, Makehama, Perksa, czy krzywa logistyczna (np. Forfar, 2004; Florczak, 2009a), objaśniają prawdopodobieństwa zgonu w konkretnym wieku x -lat lub dla względnie heterogenicznej grupy wiekowej, co do której można założyć, że zmiany (przyrosty) prawdopodobieństwa zgonu osobniczego charakteryzują się regularnością, którą można aproksymować daną funkcją. W drugich, zagregowanych/pełnych, dąży się do łącznego objaśnienia prawdopodobieństw zgonu dla wszystkich etapów życia jednocześnie przy użyciu jednorodnaniowej funkcji wieloparametrycznej. Niewątpliwą zaletą drugiego podejścia jest to, że uzyskane w nich rezultaty są mniej eratyczne i lepiej interpretowalne od funkcji cząstkowych, co jest szczególnie ważne przy próbach wykorzystania praw umieralności do celów prognostycznych (np. Rogers, 1986). To właśnie funkcje zagregowane stanowią przedmiot badań niniejszego artykułu.

Celem artykułu jest objaśnienie umieralności w Polsce w latach 1990–2015 według wieku i płci przy użyciu współczesnych modeli wieloparametrycznych i wskazanie modeli o największym potencjale poznawczym w świetle uzyskanych wyników.

Pomimo potencjalnie dużego znaczenia praktycznego problematyki poruszanej w niniejszym artykule (prognozy demograficzne) polskojęzyczny dorobek naukowy jest – w przeciwieństwie do literatury anglojęzycznej, która jednak pomija Polskę – raczej ubogi. Jedynym – jak wynika z przeglądu literatury – polskim ekonomistą, który obecnie zajmuje się tymi zagadnieniami w sposób regularny jest prof. Ireneusz Kuroпка (1992, 2009). Tym bardziej wskazane wydaje się rozpowszechnienie i pogłębienie stanu wiedzy w tym zakresie.

Struktura artykułu jest następująca. W kolejnym punkcie omówiono kwestie metodyczne i statystyczne, przytaczając źródła danych, zastosowane funkcje wraz z interpretacją parametrów oraz numeryczne metody szacunku i zastosowane funkcje celu. W sekcji trzeciej przytoczono otrzymane rezultaty i przeprowadzono adekwatną dyskusję oraz sformułowano szereg wniosków. Artykuł domykają uwagi końcowe.

2. METODYKA I DANE

Ideę wieloparametrycznego modelowania umieralności przedstawić można następująco. Niech q_{it} oznacza szereg prawdopodobieństw zgonu, lub ich transformację, dla osób w wieku i -lat w roku t , gdzie $i = 0, 1, 2, \dots, K$ (K – górna granica wieku ustalana

na podstawie dostępnych danych, $K = 85$ lub $K = 100$); $t = 1, 2, \dots, n$ (n – liczba lat objętych badaniem. Krzywa parametryczna (prawo umieralności) typu $g(i, \eta_t)$, gdzie η_t jest wektorem m parametrów tej krzywej, ma za zadanie aproksymować empiryczny rozkład umieralności w roku t . Postać funkcyjna jest zatem stała w czasie, ale zmienna względem parametrów m .

Dopasowanie krzywej umieralności do wartości empirycznych polega na znalezieniu takich wartości η_t , dla których wartość funkcji celu będzie najmniejsza poprzez minimalizowanie odpowiedniego kryterium, np. sumy kwadratów reszt. Metoda estymacji zależy przy tym od stopnia komplikacji danego prawa umieralności oraz zastosowanej funkcji celu i na ogół wymaga użycia adekwatnych metod numerycznych.

Po oszacowaniu wartości parametrów η_t uzyskujemy możliwość oceny stopnia dopasowania danego modelu do wartości empirycznych oraz konstrukcji prognoz ich wartości, stosując różnorodne techniki prognozowania szeregów czasowych (np. McNown, Rogers, 1989, 1992). Dysponując wartościami prognoz parametrów modelu oraz informacjami o liczebności i strukturze według wieku i płci populacji wyjściowej można – po uzupełnieniu o prognozy dotyczące płodności i migracji netto – postawić pełną prognozę demograficzną.

2.1. DANE I NOMENKLATURA

Dane do obliczeń empirycznych przeprowadzonych w badaniu zaczerpnięto z oficjalnych baz danych GUS ze strony <http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/ludnosc/trwanie-zycia/trwanie-zycia-tablice,1,1.html>. Szczegóły metodyczne konstrukcji pełnych tablic trwania życia, czytelnik znajdzie w opracowaniu GUS „Trwanie życia w 2015 roku” (zwłaszcza strony str. 10–13).

Poniżej przedstawiono definicje głównych pojęć analizy tablic trwania życia i rachunku aktuarialnego, na których bazują prezentowane w niniejszym artykule badania.

l_0 – początkowy rozmiar kohorty,

l_x – liczba osób która dożywająca wieku x -lat spośród początkowych l_0 osób,

$d_x = l_x - l_{x+1}$ – liczba zgonów x -latków w okresie $(x, x+1]$,

${}_t p_x = l_{x+t} / l_x$ – prawdopodobieństwo przeżycia przez x -latka kolejnych t -lat,

$q_x = d_x / l_x$, gdyż $q_x = 1 - p_x = 1 - l_{x+1} / l_x = (l_x - l_{x+1}) / l_x = d_x / l_x$,

$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt$ – ludność stacjonarna (liczba lat przeżyta przez l_x osób w okresie $(x, x+1]$),

$m_x = \frac{d_x}{\int_0^1 l_{x+t} dt}$ – moment centralny śmierci,

$s(x) = P(X > x)$ – funkcja przeżycia, czyli prawdopodobieństwa dożycia przez noworodzonego do wieku co najmniej x -lat.

Przedmiotem analiz są prawdopodobieństwa zgonu według wieku (ang. *age-specific mortality rates*) w podziale na płeć. Na rysunku 1 przedstawiono ich kształtowanie

się jako średnich z lat 1990–1995, 2000–2005 oraz 2010–2015. Zastosowanie średnich pięcioletnich neutralizuje wpływ oddziaływania czynników przypadkowych, zaś długi (10-letni) okres dzielący poszczególne szeregi pozwala zaobserwować generalną tendencję spadkową prawdopodobieństw we wszystkich grupach wieku. Łatwo przy tym zauważyć, iż spadki te są relatywnie wyższe w starszych grupach wiekowych oraz dla nowonarodzonych. Ze względu na fakt, iż wartość maksymalna q_x jest ponad 10 tysięcy razy większa od wartości minimalnej przedstawienie wszystkich prawdopodobieństw zgonu na jednym rysunku byłoby niekomunikatywne. Dlatego zdecydowano się wyszczególnić kilka grup wiekowych. W punkcie prezentującym wyniki analizy empirycznej z kolei zdecydowano się na zastosowanie skali logarytmicznej, gdyż idea modelowanie umieralności w przy użyciu funkcji wieloparametrycznych zasada się na uwzględnieniu przez te funkcje wszystkich grup wiekowych jednocześnie (*vide* punkt 3 artykułu).

2.2. ZASTOSOWANE FUNKCJE PARAMETRYCZNE

Przy doborze praw umieralności, które poddano empirycznemu badaniu dla populacji Polski, kierowano się zasadą ich naukowej aktualności i rozpowszechnienia (por. Bell, 1997; Booth, Tickle, 2008)⁵. Stąd zrezygnowano z modeli starszych, skonstruowanych jeszcze w XIX wieku, których opis zawiera Forfar (2004). Ogółem analizie poddano sześć modeli, które przedstawiono poniżej.

8-parametrowy model Heligmana-Pollarda (Heligman, Pollard, 1980)

Pollard i Heligman zaproponowali rodzinę modeli umieralności postaci:

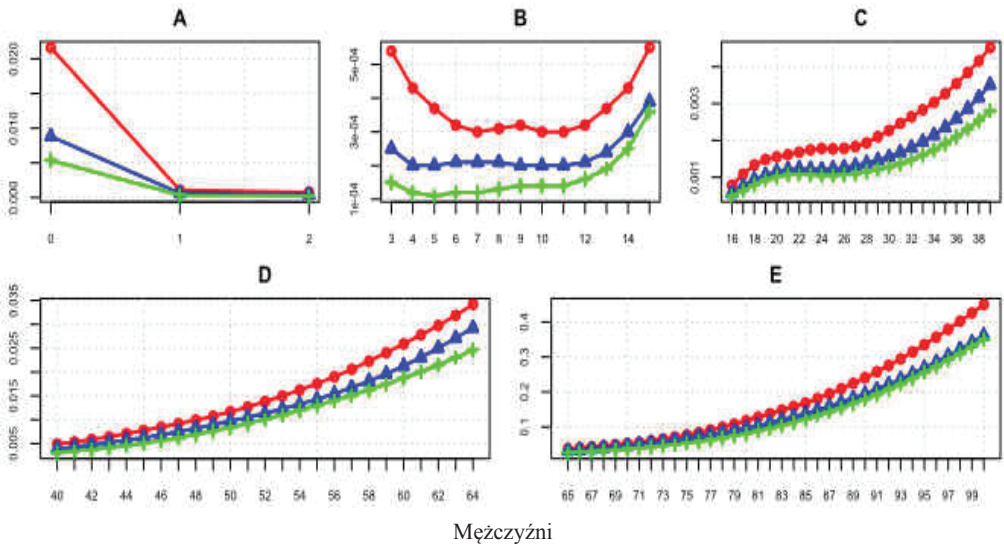
$$\frac{q_x}{p_x} = \sum_{i=1}^N A_i e^{-B_i(f_i(x)-C_i)^{D_i}}, \quad (1)$$

Szczególnym przypadkiem równania (1) jest 8-parametrowy model Heligmana-Pollarda:

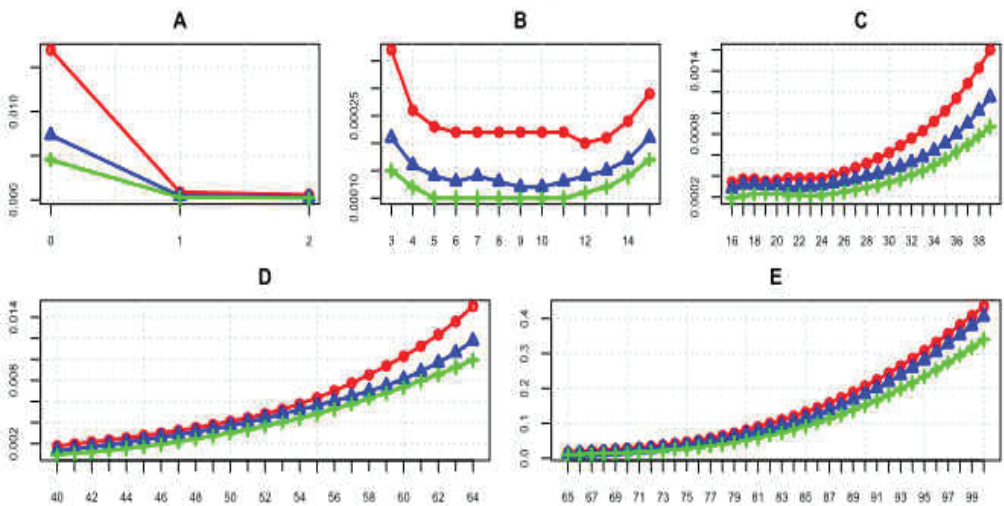
$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + D e^{-E(\ln x - \ln F)^2} + G H^x, \quad (2)$$

(gdź $A^{(x+B)^C} + D e^{-E(\ln x - \ln F)^2} + G H^x = e^{\ln(A)(x+B)^C} + D e^{-E(\ln x - \ln F)^2} + e^{(\ln G + x \ln H)}$).

⁵ Rozważano także model Hannerza (2001). Jednakże ostatecznie zrezygnowano z jego prezentacji, gdyż autorzy napotkali na nieprzezwyciężalne trudności techniczne w jego implementacji. W oryginalnym artykule brakuje bowiem dostatecznie szczegółowych informacji umożliwiających replikę opisywanych tam procedur. Na usprawiedliwienie dodać należy, iż poza oryginalnym artykułem model ten nie doczekał się żadnej innej implementacji.



Mężczyźni



Kobiety

—●— 1990-1995 —▲— 2000-2005 —◆— 2010-2015

A – grupa wiekowa 0–2 lata; B – grupa wiekowa 3–15 lat; C – grupa wiekowa 16–39 lat;
D – grupa wiekowa 40–64 lata; E – grupa wiekowa 65+ lat

Rysunek 1. Kształtowanie się cząstkowych współczynników zgonu, q_x , dla mężczyzn i kobiet w Polsce w latach 1990–2015

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Parametry A , B i C równania (2) określają umieralność w początkowym okresie życia, gdzie A i B interpretowane są jako prawdopodobieństwa zgonu odpowiednio dla osób w wieku 0 i 1 lat, zaś parametr C określa tempo wygasania prawdopodobieństwa zgonu w dalszych latach dzieciństwa.

Parametry D , E oraz F kształtują umieralność związaną z dojrzewaniem i wczesną dorosłością, która charakteryzuje się skokowym wzrostem prawdopodobieństwa zgonu w wyniku różnego rodzaju śmiertelnych urazów (np. wypadki komunikacyjne, samobójstwa, bójkę ze skutkiem śmiertelnym, utonięcia, zatrucia, itp.). I tak parametr D oznacza natężenie wpływu całego komponentu prawdopodobieństwa śmierci urazowej (również w wieku dorosłym), E można interpretować zaś jako miarę rozrzutu⁶ wokół wieku, w którym omawiana umieralność osiąga swoje maksimum, o czym informuje parametr F . Parametry G oraz H mają interpretację taką jak w prawie umieralności Gomperta, czyli odpowiadają odpowiednio za tzw. umieralność bazową oraz rosną wraz z procesem osobniczego starzenia się w sposób wykładniczy.

Równanie (2) przekształcono – tak jak jest to czynione we współczesnych zastosowaniach modelu Heligmana-Pollarda – względem q_x , otrzymując:

$$q_x = \frac{f(x, A, B, C, \dots, H)}{1 + f(x, A, B, C, \dots, H)} \quad (3)$$

gdzie $f(x, A, B, C, \dots, H)$ równa jest prawej stronie (2).

Relacja (3) posłużyła do oszacowania parametrów 8-parametrowego modelu Heligmana-Pollarda.

9-parametrowy model Heligmana-Pollarda⁷ (Heligman, Pollard, 1980):

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GHx^K. \quad (4)$$

Parametry modelu mają taką samą interpretację jak dla przypadku ośmioparametrowym, zaś parametr K dodatkowo czyni bardziej elastycznym komponent odpowiadający za proces starzenia osobniczego.

Analogicznie do przypadku ośmioparametrowego, po dokonaniu odpowiednich przekształceń, szacowano parametry następującej funkcji:

$$q_x = \frac{f(x, A, B, C, \dots, K)}{1 + f(x, A, B, C, \dots, K)}. \quad (5)$$

⁶ Ale nie jest to symetryczna miara dyspersji, gdyż $(\ln(x+a) - \ln(x)) < (\ln(x) - \ln(x-a))$ dla dowolnego $a < 0 < x$.

⁷ W prezentowanym zestawieniu intencjonalnie ominięto trzecią propozycję modelu postaci: $q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{(1+KGH^x)^2}$, gdyż wartości tego modelu mogą przybierać wartości większe od jedności, o czym wspominają sami autorzy tej funkcji.

Model Kostaki (Kostaki, 1992)

Model Kostaki jest modyfikacją 8-parametrowego modelu Heligmana-Pollarda, ale wprowadza dodatkowo warunek logiczny i liczy 9 parametrów:

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-\mathbb{1}_{\{x < F\}}(x)E_1 + \mathbb{1}_{\{x \geq F\}}(x)E_2}(\ln x - \ln F)^2 + GH^x, \quad (6)$$

gdzie $\mathbb{1}_{\{\Omega\}}(x)$ przyjmuje wartość 1, jeśli x należy do zbioru Ω i 0 w przeciwnym przypadku.

Im wyższy jest parametr E_1 , tym bardziej stromy jest przyrost prawdopodobieństwa zgonu wynikającego ze zwiększonej wypadkowości. Parametr E_2 obrazuje zatem spadek prawdopodobieństwa zgonu z tego tytułu po osiągnięciu szczytu D w wieku F . Powyższe parametry powinny przyjmować wartości większe od zera, za wyjątkiem parametru E_2 , w którym to przypadku dopuszczalna jest wartość ujemna, co oznaczałoby, że prawdopodobieństwo z tytułu zwiększonej wypadkowości utrzymuje się na stałym poziomie (i wynosi $D/(1+D)$).

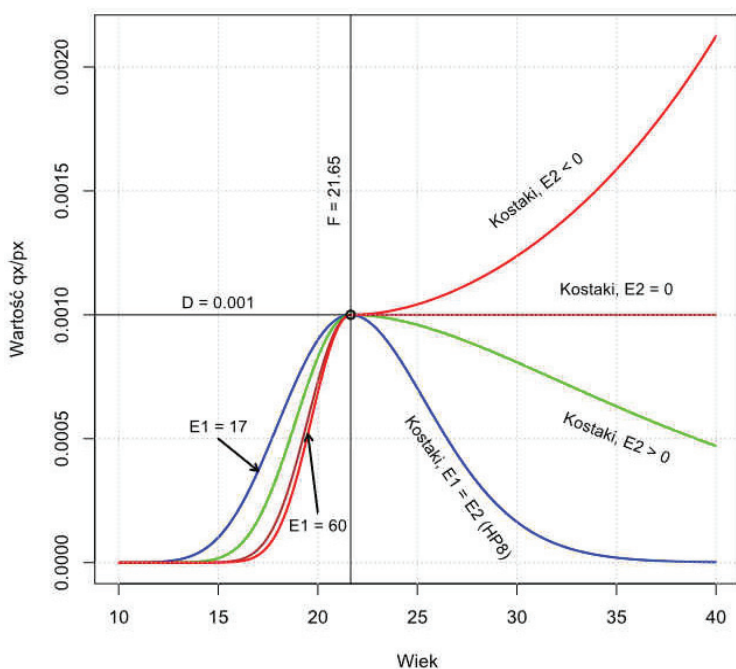
Tak jak we wcześniejszych modelach, estymację parametrów modelu Kostaki przeprowadzono dla funkcji, w której zbiorem wartości są prawdopodobieństwa zgonu q_x , po przeprowadzeniu przekształceń analogicznych do (3) i (5).

Na rysunku 2 zinterpretowano parametry D , F i E dla ośmioparametrowego modelu Heligmana-Pollarda, oraz E_1 , E_2 dla modelu Kostaki. Model Kostaki dla równych parametrów E_1 oraz E_2 jest równoważny z modelem HP8 dla $E = E_1$, gdyż wynika to z równości:

$$(\mathbb{1}_{\{x < F\}}(x)E_1 + \mathbb{1}_{\{x \geq F\}}(x)E_1) = E_1 (\mathbb{1}_{\{x < F\}}(x) + \mathbb{1}_{\{x \geq F\}}(x)) = E_1$$

$$\begin{aligned} \frac{q_x}{p_x} &= A^{(x+B)^C} + De^{-E_1(\ln x - \ln F)^2} + GH^x = \frac{q_x}{p_x} = \\ &= A^{(x+B)^C} + De^{-\mathbb{1}_{\{x < F\}}(x)E_1 + \mathbb{1}_{\{x \geq F\}}(x)E_2}(\ln x - \ln F)^2 + GH^x. \end{aligned} \quad (7)$$

Rysunek 2 przedstawia modelowaną relację q_x/p_x i prawdopodobieństwo zgonu modelowane za pomocą drugich składowych powyższych funkcji: $De^{-E(\ln x - \ln F)^2}$ oraz $De^{-\mathbb{1}_{\{x < F\}}(x)E_1 + \mathbb{1}_{\{x \geq F\}}(x)E_2}(\ln x - \ln F)^2$.



Rysunek 2. Interpretacja parametrów modelu Heligmana-Pollarda oraz Kostaki
 Źródło: opracowanie własne.

Parametr D w modelu Heligmana-Pollarda (kolor niebieski) należy interpretować jako maksymalne prawdopodobieństwo (mówimy tu o niewielkich wartościach q_x/p_x , zatem $q_x \approx q_x/p_x$) śmierci w następnym roku w wyniku umieralności związanej ze wczesną dorosłością. Wiek, w którym wspomniane maksimum jest osiągnięte wynosi F .

Parametr E jest miarą rozrzutu umieralności, przy czym rozrzut jest tym większy im mniejszy jest parametr E (np. dla linii czerwonej E (E_1 w przypadku modelu Kostaki) wynosi 60, zaś dla modelu opisanego linią niebieską jest on równy 17). Rozrzut ten jednak nie jest symetryczny, gdyż $\ln x - \ln F$ jest funkcją wklęsłą względem x , co oznacza to, że umieralność z przyczyn urazowych wygasa wolniej niż wzrasta. Uwzględnia ona szereg ryzyk, które pojawiają się wraz z wkroczeniem w wiek dojrzewania, ale które utrzymują również się w okresie dorosłości. Można spodziewać się bowiem szybszego wzrostu prawdopodobieństwa zgonu z powodów wyżej wspomnianych dla osób młodocianych, którzy w okresie dzieciństwa nie byli narażeni na zagrożenia, które dotyczą już osób dorosłych. Model Kostaki modeluje zatem szybkość wzrostu umieralności z tytułu w/w ryzyk, jak i tempo spadku (czy też wzrostu, gdy $E_2 < 0$) po osiągnięciu szczytu D w wieku F .

Przykład krzywej modelującej umieralność według modelu zaproponowanego przez Kostaki oznaczono kolorem zielonym. Jeśli $E_2 = 0$ (kolor brązowy), to D oznacza praw-

dopodobieństwo śmierci z tytułu wczesnej dorosłości, które pozostaje stałe do końca życia począwszy od wieku F . Wydaje się, że $E_2 < 0$ (kolor czerwony) nie ma interpretacji – umieralność modelowana wyrażeniem $De^{-\mathbb{1}_{\{x < F\}}(x)E_1 + \mathbb{1}_{\{x \geq F\}}(x)E_2}(lnx - lnF)^2$ rośnie bowiem do końca życia i stanowi swoisty substytut dla umieralności związanej z prawem Gompertza. Niestety w tym przypadku zatracana jest interpretacja parametrów D oraz E .

8-parametrowy model Carriere'a (Carriere, 1992)

Wartościami oryginalnej funkcji tego modelu nie są prawdopodobieństwa zgonu w wieku x -lat, q_x , ale prawdopodobieństwa przeżycia x -lat, $s(x)$. Model ten stanowi złożenie rozkładów przeżycia Weibulla, odwróconego rozkładu Weibulla oraz Gompertza i jest następującej postaci:

$$s(x) = \psi_1 s_1(x) + \psi_2 s_2(x) + (1 - \psi_1 - \psi_2) s_3(x), \quad (8)$$

gdzie:

$$s_1(x) = e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{m_1/\sigma_1}} - \text{rozkład Weibulla,}$$

$$s_2(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{m_2}\right)^{-\frac{m_2}{\sigma_2}}} - \text{odwrócony rozkład Weibulla,}$$

$$s_3(x) = e^{e^{-\frac{m_3}{\sigma_3} - e^{(x-m_3)/\sigma_3}}} - \text{rozkład Gompertza.}$$

Interpretacja parametrów jest następująca:

ψ_1 – prawdopodobieństwo zgonu z powodów wczesno-dziecięcych,

ψ_2 – prawdopodobieństwo zgonu w okresie nastoletnim oraz wczesnej dorosłości,

ψ_3 – prawdopodobieństwo zgonu z powodu biologicznego starzenia się organizmu,

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – miary rozrzutów poszczególnych rozkładów,

m_1 – brak klarownej interpretacji: jeśli $\sigma_1 \geq m_1$ moda rozkładu Weibulla równa jest zero, w przeciwnym przypadku jest większa od 0,

m_2 – moda odwróconego rozkładu Weibulla,

m_3 – moda rozkładu Gompertza.

Zgodnie z procedurą opisaną w artykule źródłowym (Carriere, 1992), szacowane są jednak parametry przekształconej funkcji (8), w której wartością funkcji jest q_x , nie zaś $s(x)$. Poniżej wyprowadzono odpowiednie zależności łączące $s(x)$ i q_x .

Niech X będzie zmienną losową określającą dalszy czas trwania życia noworodka, zaś $T(x)$ – zmienną losową określającą dalszy czas trwania życia x -latka o kolejne t -lat. Przyjmując kluczowe założenie o tym, że dalsze trwanie życia x -latka jest niezależne od trybu dotychczasowego życia⁸, otrzymujemy:

$$P(T(x) > t) = P(X > x + t | X > x) = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)}, \quad (9)$$

⁸ Założenie to w kontekście tablic życia dla całej populacji jest w pełni uzasadnione.

Prawdopodobieństwo przeżycia t kolejnych lat przez x -latka dane jest następującą zależnością:

$${}_t p_x = P(T(x) > t) = P(X > x + t)/P(X > x) = s(x + t)/s(x), \quad (10)$$

przy czym zgodnie z nomenklaturą aktuarialną:

$$p_x = {}_1 p_x.$$

Natomiast:

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - s(x+t)/s(x), \quad (11)$$

zaś:

$$q_x = {}_1 q_x.$$

Ostatecznie zatem w 8-parametrowym modelu Carriere'a szacowane są parametry następującej funkcji:

$$q_x = 1 - s(x + 1)/s(x), \quad (12)$$

w której $s(x)$ dane jest zależnością (8).

11-parametrowy model Carriere'a (Carriere, 1992)

Carriere proponuje również model 11-parametryczny, który jego zdaniem relatywnie lepiej objaśnia umieralność kobiet niż mężczyzn, i który jest dwukrotnym złożeniem rozkładu Weibulla i Gompertza:

$$s(x) = \psi_1 s_1(x) + \psi_2 s_2(x) + \psi_3 s_3(x) + (1 - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3) s_4(x), \quad (13)$$

gdzie:

$$s_1(x) = e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{m_1/\sigma_1}} - \text{rozkład Weibulla,}$$

$$s_2(x) = e^{-\left(\frac{x}{m_2}\right)^{m_2/\sigma_2}} - \text{rozkład Weibulla,}$$

$$s_3(x) = e^{e^{-\frac{m_3}{\sigma_3} - e^{(x-m_3)/\sigma_3}}} - \text{rozkład Gompertza,}$$

$$s_4(x) = e^{e^{-\frac{m_4}{\sigma_4} - e^{(x-m_4)/\sigma_4}}} - \text{rozkład Gompertza,}$$

σ_i, m_i – posiadają interpretację analogiczną do wersji 8-parametrycznej modelu.

W odróżnieniu do wersji 8-parametrycznej parametry ψ_i modelu 11-parametrycznego nie posiadają interpretacji, co jest poważną słabością tej propozycji. Tak jak w przypadku wersji 8-parametrycznej modelu Carriere szacuje parametry funkcji umieralności, nie zaś przeżycia:

$$q_x = 1 - s(x + 1)/s(x), \quad (14)$$

w której $s(x)$ dane jest zależnością (13) (por. wyprowadzenia dla wersji 8-parametrycznej).

Model wielowykładniczy (ang. *multiexponential model*; np. Heligman, Pollard, 1980)

W modelu tym argumentem funkcji są nie prawdopodobieństwa zgonu, ale centralne momenty umieralności:

$$m_x = a_0 + a_1 e^{-\alpha_2 x} + a_3 e^{-\alpha_4(x-\mu) - e^{-\lambda(x-\mu)}} + a_5 e^{\alpha_6 x}. \quad (15)$$

Składniki sumy drugi, trzeci i czwarty opisują mechanizmy umieralności dotyczące zgonów we wczesnym dzieciństwie, wczesnej dorosłości oraz związanej ze starzejącym się organizmem. Parametr a_1 oznacza natężenie zgonów we wczesnym dzieciństwie, parametr α_2 określa jak szybko obniża się umieralność w dalszym okresie dzieciństwa, zaś α_5 określa przyrost prawdopodobieństwa z tytułu starzenia się organizmu. Jest to zatem model 9-cio parametryczny.

W wyniku estymacji parametrów modelu (15) otrzymuje się wartości teoretyczne m_x , nie zaś wartości teoretyczne q_x . Aby zatem zapewnić porównywalność wyników z wszystkimi wcześniej przytoczonymi modelami, konieczne jest ustalenie zależności łączącej te dwie kategorie, co uczyniono poniżej⁹ (por. Heligman-Pollard, 1980). Przyjmując założenie o jednostajnej umieralności w przedziale $[x, x + 1]$ lat mamy: ${}_t q_x = t q_x$ dla t należącego do przedziału $[0, 1]$. Przy założeniu jednostajnej umieralności otrzymujemy:

$$\int_0^1 l_{x+t} dt = l_x \int_0^1 {}_t p_x dt = l_x \int_0^1 (1 - t q_x) dt = l_x (1 - \frac{1}{2} q_x). \quad (16)$$

A stąd:

$$m_x = \frac{d_x}{l_x (1 - \frac{1}{2} q_x)} = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} q_x} = \frac{2q_x}{2 - q_x}. \quad (17)$$

Ostatecznie zatem:

$$q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x}. \quad (18)$$

⁹ Przekształcenie to zapewnia porównywalność uzyskanych rezultatów w modelu wielowykładniczym z wynikami pozostałych modeli, w których minimalizowane są funkcje celu względem q_x . Jest to standardowe postępowanie, gdy dąży się do porównania stopnia dopasowania modeli o różnych zmiennych objaśnianych (por. Heligman-Pollard, 1980).

2.3. KRYTERIA MINIMALIZACJI I ZASTOSOWANE METODY ESTYMACJI

W trakcie szacowania parametrów praw umieralności, opisanych w poprzedzającym punkcie, minimalizowano następujące cztery funkcje celu, które brane są pod uwagę w badaniach empirycznych¹⁰ (por. Heligman, Pollard, 1980; Carriere, 1992):

$$1) \quad \sum_{x=0}^N (\ln(q_x) - \ln(\hat{q}_x))^2, \quad (19)$$

gdzie:

q_x – tablicowe prawdopodobieństwa zgonu x-latka w wieku $(x, x+1]$,

\hat{q}_x – prawdopodobieństwa teoretyczne.

Ze względu na użycie operatora logarymicznego („spłaszczanie” wartości absolutnych) przypisuje się w przybliżeniu taką samą wagę wszystkim prawdopodobieństwom zgonu. Zauważy bowiem, że $\ln(q_x) - \ln(\hat{q}_x) = \ln\left(\frac{q_x}{\hat{q}_x}\right)$. Funkcja straty zależy zatem od relatywnej (procentowej) różnicy umieralności.

$$2) \quad \sum_{x=0}^N (q_x - \hat{q}_x)^2 / q_x^2. \quad (20)$$

Jest to najczęściej stosowane kryterium w badaniach empirycznych. Kwadraty błędów ważone są kwadratami poziomów tablicowych prawdopodobieństw zgonu, co oznacza, iż wagi są proporcjonalne do kwadratu tych prawdopodobieństw. Wszystkie prawdopodobieństwa są w tym przypadku niejako „tak samo ważne”.

$$3) \quad \sum_{x=0}^N (q_x - \hat{q}_x)^2 / q_x. \quad (21)$$

W kryterium tym kwadraty błędów ważone są poziomami tablicowych prawdopodobieństw zgonu, co oznacza, iż wagi są proporcjonalne do wartości tych prawdopodobieństw. Model dopasuje się relatywnie lepiej do prawdopodobieństw zgonu dla starszych grup wiekowych.

$$4) \quad \sum_{x=0}^N (q_x - \hat{q}_x) \ln(q_x - \hat{q}_x). \quad (22)$$

Jest to złożenie kryterium minimalizacji średniego błędu reszt (wyrażenie $(q_x - \hat{q}_x)$) oraz kryterium 1) (wyrażenie $\ln(q_x - \hat{q}_x)$). Zatem model dopasuje się relatywnie lepiej do prawdopodobieństw zgonu dla osób starszych.

Ze względu na występowanie operatora logarytmowania kryteriów (19) i (22) nie można zastosować dla modelu wielowykładniczego, gdyż zawarty w równaniu (15) wyraz wolny a_0 przyjmować może wartości ujemne.

¹⁰ Na ogół autorzy decydują się na wybór tylko jednego z w/w kryteriów.

Ostatecznie uzyskano cztery warianty oszacowań parametrów strukturalnych dla wszystkich 6-ciu omówionych w poprzednim punkcie modeli. Łącznie zatem oszacowano parametry (4 (kryteria minimalizacji) x 6 (modele) x 2 (płeć) x 26 (liczba lat) – 2 (kryteria których nie można użyć dla modelu wielowykładniczego) x 1 (model wielowykładniczy) x 2 (płeć) x 26 (lat) =) 1144 modeli.

Jedynie kryterium (19) daje możliwość zastosowania nieliniowej metody najmniejszych kwadratów. W przypadku pozostałych kryteriów konieczne było zastosowanie numerycznych metod estymacji wyszukujących minimum funkcji straty. Zdecydowano się na użycie metody wielokrotnego startu, w której z ustalonych przedziałów dla wartości parametrów losowane są (według rozkładu jednostajnego na tych przedziałach) początkowe punkty startowe dla metody wyszukującej rozwiązanie lokalne. Algorytm dokonuje optymalizacji dla wszystkich punktów startu, a następnie wybiera punkt w którym zoptymalizowana funkcja straty przyjmuje wartość najmniejszą.

W celu udoskonalenia działania algorytmu minimalizującego funkcję celu przy użyciu gradientu funkcji, zdecydowano się na analityczne wyprowadzenie gradientów. Jest to szczególnie istotne, gdyż w przypadku numerycznego wyznaczania gradientu funkcji, uzyskane wyniki mogą zawierać błędy przybliżeń, zwłaszcza w przypadku funkcji wykładniczych.

W celu egzemplifikacji tego postępowania poniżej zamieszczono odpowiednie wyprowadzenia dla parametru σ_1 ośmioparametrowego modelu Carrier'a i dla funkcji straty (20). Otrzymujemy:

$$\frac{d}{d\sigma_1} \sum_{x=0}^N \frac{(q_x - g(x, \eta))^2}{q_x^2} = -2 \sum_{x=0}^N \frac{\frac{dg(x; \eta)}{d\sigma_1} (q_x - g(x, \eta))}{q_x^2}. \quad (23)$$

Wiadomo, że $f(x; \dots) = 1 - s(x+1)/s(x)$, gdzie s jest funkcją przeżywalności w modelu Carrier'a.

Brakuje zatem wartości pochodnej funkcji f . Spełniona jest następująca równość:

$$\frac{dg(x; \eta)}{d\sigma_1} = \frac{-\frac{d}{d\sigma_1} s(x+1)s(x) + s(x+1)\frac{d}{d\sigma_1} s(x)}{s(x)^2}. \quad (24)$$

Kolejną funkcją której pochodną należy wyznaczyć jest zatem s . Mamy:

$$\frac{d}{d\sigma_1} s(x) = \frac{d}{d\sigma_1} (\psi_1 s_1(x) + \psi_2 s_2(x) + (1 - \psi_1 - \psi_2) s_3(x)) = \psi_1 \frac{d}{d\sigma_1} s_1(x), \quad (25)$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma_1} s_1(x) &= \frac{d}{d\sigma_1} e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{m_1/\sigma_1}} = -e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{m_1/\sigma_1}} \frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}} = \\ &= -e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}} \ln\left(\frac{x}{m_1}\right) \left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}} \frac{d}{d\sigma_1} \frac{m_1}{\sigma_1} = e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}} \ln\left(\frac{x}{m_1}\right) \left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}} \frac{m_1}{\sigma_1^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Aby uzyskać analityczną wartość gradientu do (23) podstawiamy „kaskadowo” poszczególne wartości otrzymując ostateczny rezultat:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{x=0}^N \left(q_x - 1 + \frac{\psi_1 e^{-\left(\frac{x+1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}} + \psi_2 \left(1 - e^{-\left(\frac{x+1}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{\sigma_2}}}\right) + (1-\psi_1-\psi_2)e^{e^{-\frac{m_3}{\sigma_3-e} \frac{x+1-m_3}{\sigma_3}}}}{\psi_1 e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}} + \psi_2 \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{\sigma_2}}}\right) + (1-\psi_1-\psi_2)e^{e^{-\frac{m_3}{\sigma_3-e} \frac{x-m_3}{\sigma_3}}}} \right) &\left(\psi_1 e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}} + \right. \\ \psi_2 \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{\sigma_2}}}\right) &+ \\ (1-\psi_1-\psi_2)e^{e^{-\frac{m_3}{\sigma_3-e} \frac{x-m_3}{\sigma_3}}} &\left. \right) a_x^{-2} \left(-\psi_1 e^{-\left(\frac{x+1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}} \ln\left(\frac{x+1}{m_1}\right) \left(\frac{x+1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}} \frac{m_1}{\sigma_1^2} \left(\psi_1 e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}} + \right. \right. \\ \psi_2 \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{\sigma_2}}}\right) &+ (1-\psi_1-\psi_2)e^{e^{-\frac{m_3}{\sigma_3-e} \frac{x-m_3}{\sigma_3}}} \left. \right) + \left(\psi_1 e^{-\left(\frac{x+1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}} + \psi_2 \left(1 - e^{-\left(\frac{x+1}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{\sigma_2}}}\right) + \right. \\ (1-\psi_1-\psi_2)e^{e^{-\frac{m_3}{\sigma_3-e} \frac{x+1-m_3}{\sigma_3}}} &\left. \right) \psi_1 e^{-\left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}}} \ln\left(\frac{x}{m_1}\right) \left(\frac{x}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{\sigma_1}} \frac{m_1}{\sigma_1^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Wszystkie obliczenia przeprowadzono w środowisku programu R, po uprzednim zakodowaniu wartości analitycznych odpowiednich gradientów. Wykorzystano funkcję *nlimb*, która umożliwia ustalanie ograniczeń dolnych i górnych, oraz pakiet bazowy tego programu *stats*. Zastosowana procedura optymalizacyjna to metoda quasi-Newtona. W celu zapewnienia wysokiej precyzji szacunków dla każdego parametru przyjęto 500 punktów startowych.

W przypadku kryterium (19) zastosowano inną procedurę wyszukiwania rozwiązania lokalnego, bowiem funkcja celu (straty) jest postaci:

$$\sum_{i=0}^N (x_i - g(i, \eta))^2 \rightarrow \min. \quad (28)$$

Jest to oczywiście problem nieliniowych najmniejszych kwadratów. Pozostałe kryteria, jak już wspomniano, nie dają się przedstawić w powyższej postaci. Metoda, zastosowana w celu rozwiązania powyższego problemu, wykorzystuje informację zawartą nie tylko w całej sumie kwadratów reszt (np. w postaci gradientu) ale również tą, którą posiadają poszczególne składniki sumy (reszty) w postaci jacobianu funkcji wektorowej:

$$g(0, 1, \dots, N, \eta) = (x_1 - g(0, \eta), x_2 - g(1, \eta), \dots, x_N - g(N, \eta)),$$

gdzie:

$$N = (\eta_1, \dots, \eta_K) - \text{wektor parametrów.}$$

Dla ustalonych parametrów modelu ϕ jacobianem nazywamy macierz o wymiarach $N \times K$ zawierającą w i -tym wierszu i j -tej kolumnie pochodną cząstkową $\frac{\partial g(i-1, \eta)}{\partial \eta_j}$.

Do obliczeń wykorzystano program R, a konkretnie funkcję *nlf* pochodzącą z pakietu *nlmrt*. Funkcja stanowi implementację autorskiej modyfikacji algorytmu Marquardt'a i umożliwia ustalenie ograniczeń dla parametrów funkcji celu. Szczegóły metody można znaleźć np. w Nash (1990).

Podobnie jak w metodach opartych o gradienty, jacobian jako funkcja ϕ może być wyznaczony numerycznie, bądź wprowadzony do modelu jako funkcja analityczna. Drugi sposób pozwala na szybsze i dokładniejsze wykonanie procedury optymalizacyjnej. Dlatego zdecydowano się na przyjęcie takiego rozwiązania. Na przykład dla parametru σ_1 w ośmioparametrycznym modelu Carrier-a wartość jacobianu w pierwszym wierszu i w kolumnie odpowiadającej parametrowi σ_1 wyniesie: $\frac{\partial}{\partial \sigma_1}(q_0 - g(0, \eta)) = -\frac{\partial}{\partial \sigma_1}g(0, \eta)$, gdzie prawa strona równania jest równa prawej stronie (24), dla $x = 0$.

3. WYNIKI I DYSKUSJA

Na podstawie danych zastanych i stosując opisane w poprzedzającym punkcie modele oraz numeryczne metody estymacji oszacowano łącznie parametry 1144 modeli. Z oczywistych względów zatem narracja musi zostać przeprowadzona w sposób usystematyzowany i lakoniczny¹¹. W tabeli 1 i 2 przedstawiono wartości minimalizowanych funkcji strat według kryteriów omówionych w punkcie 2.3 dla lat 1990–2015 w pięcioletnich odstępach. Zrezygnowano z przytoczenia oszacowań parametrów wszystkich modeli z wyjątkiem tych, które uznano za najlepsze (patrz dalej). Nadmienić należy jednak, iż porównanie uzyskanych oszacowań z wynikami raportowanymi w oryginalnych artykułach nie identyfikuje w tym zakresie wyraźnych rozbieżności.

¹¹ Czytelnicy zainteresowani pełnymi wynikami proszeni są o kontakt z autorami.

Tabela 1.

Wartości funkcji strat dla mężczyzn według kryteriów (19)–(22) w latach 1990–2015

Model	Kryterium (19)	Kryterium (20)	Kryterium (21)	Kryterium (22)
	Rok 1990			
8-P model Heligmana-Pollarda	0,965433	1,034200	0,004684	0,004972
9-P model Heligmana-Pollarda	0,507292	0,508804	0,003544	0,003359
Model Kostaki	0,199366	0,200094	0,004600	0,004773
Model wielowykładniczy	-	0,987718	0,003372	-
8-P model Carriere'a	0,977945	1,022070	0,002689	0,002524
11-P model Carriere'a	0,554642	0,754609	0,002577	0,002631
	Rok 1995			
8-P model Heligmana-Pollarda	1,094095	1,216697	0,00323	0,003553
9-P model Heligmana-Pollarda	0,444128	0,44595	0,002618	0,002095
Model Kostaki	0,259436	0,260462	0,003200	0,003533
Model wielowykładniczy	-	1,282205	0,002235	-
8-P model Carriere'a	1,267859	1,328052	0,00208	0,001948
11-P model Carriere'a	0,668567	0,711153	0,001704	0,001600
	Rok 2000			
8-P model Heligmana-Pollarda	1,272414	1,416363	0,001677	0,001780
9-P model Heligmana-Pollarda	0,21897	0,217642	0,001693	0,002038
Model Kostaki	0,369454	0,375562	0,001657	0,001762
Model wielowykładniczy	-	1,329003	0,002209	-
8-P model Carriere'a	1,648845	1,805800	0,005288	0,004693
11-P model Carriere'a	0,533345	0,857215	0,005905	0,002383
	Rok 2005			
8-P model Heligmana-Pollarda	1,878108	2,021160	0,003363	0,003563
9-P model Heligmana-Pollarda	0,463726	0,462840	0,002668	0,002252
Model Kostaki	0,520942	0,511655	0,003097	0,003419
Model wielowykładniczy	-	1,213728	0,002060	-
8-P model Carriere'a	2,186219	2,188446	0,003005	0,002740
11-P model Carriere'a	0,887464	0,860657	0,003582	0,002649

Tabela 1. (cd.)

Model	Kryterium (19)	Kryterium (20)	Kryterium (21)	Kryterium (22)
	Rok 2010			
8-P model Heligmana-Pollarda	1,829949	1,854338	0,003599	0,003928
9-P model Heligmana-Pollarda	0,407300	0,408718	0,002588	0,003286
Model Kostaki	0,67702	0,666578	0,003103	0,003948
Model wielowykładniczy	-	1,331265	0,002794	-
8-P model Carriere'a	2,116816	2,061702	0,004521	0,004470
11-P model Carriere'a	0,958834	0,940442	0,002304	0,002344
Rok 2015				
8-P model Heligmana-Pollarda	1,657755	1,672946	0,002818	0,003326
9-P model Heligmana-Pollarda	0,324221	0,32329	0,002424	0,003218
Model Kostaki	0,650296	0,630329	0,002520	0,003074
Model wielowykładniczy	-	1,132140	0,003442	-
8-P model Carriere'a	2,563684	1,809610	0,005088	0,004592
11-P model Carriere'a	2,310068	1,070154	0,002537	0,002649

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2.

Wartości funkcji strat dla kobiet według kryteriów (19)–(22) w latach 1990–2015

Model	Kryterium (19)	Kryterium (20)	Kryterium (21)	Kryterium (22)
	Rok 1990			
8-P model Heligmana-Pollarda	0,965433	0,624813	0,001130	0,001174
9-P model Heligmana-Pollarda	0,295604	0,432577	0,000856	0,000669
Model Kostaki	0,471160	0,615058	0,001040	0,001062
Model wielowykładniczy	-	0,922046	0,001458	-
8-P model Carriere'a	0,582043	0,555860	0,003508	0,001458
11-P model Carriere'a	0,251071	0,206107	0,002973	0,002554
Rok 1995				
8-P model Heligmana-Pollarda	1,094095	0,790615	0,001183	0,001143
9-P model Heligmana-Pollarda	0,47496	0,458072	0,001562	0,001293
Model Kostaki	0,498883	0,71042	0,001013	0,001017
Model wielowykładniczy	-	1,332652	0,001441	-
8-P model Carriere'a	0,563193	0,570995	0,004017	0,001441
11-P model Carriere'a	0,166369	0,164641	0,002849	0,002143

Tabela 2. (cd.)

Model	Kryterium (19)	Kryterium (20)	Kryterium (21)	Kryterium (22)
	Rok 2000			
8-P model Heligmana-Pollarda	1,272414	0,82159	0,002595	0,001702
9-P model Heligmana-Pollarda	0,600565	0,577622	0,002113	0,002237
Model Kostaki	0,801069	0,810949	0,001284	0,001297
Model wielowykładniczy	-	1,255143	0,001956	-
8-P model Carriere'a	0,70465	0,706761	0,004054	0,001956
11-P model Carriere'a	0,264928	0,252956	0,002852	0,002566
	Rok 2005			
8-P model Heligmana-Pollarda	1,878108	1,1386	0,001637	0,002545
9-P model Heligmana-Pollarda	1,016928	1,020856	0,002664	0,003082
Model Kostaki	1,106127	1,133087	0,001772	0,001776
Model wielowykładniczy	-	1,007168	0,00549	-
8-P model Carriere'a	1,293068	1,316877	0,005564	0,00549
11-P model Carriere'a	0,447484	0,428995	0,003145	0,003146
	Rok 2010			
8-P model Heligmana-Pollarda	1,829949	0,945641	0,004998	0,004962
9-P model Heligmana-Pollarda	0,827182	0,838371	0,005581	0,005353
Model Kostaki	0,889525	0,935693	0,004281	0,004237
Model wielowykładniczy	-	1,151489	0,003151	-
8-P model Carriere'a	0,784155	0,818122	0,006912	0,003151
11-P model Carriere'a	0,153654	0,147503	0,003881	0,002241
	Rok 2015			
8-P model Heligmana-Pollarda	1,657755	1,015328	0,004297	0,004222
9-P model Heligmana-Pollarda	0,955299	1,321934	0,004367	0,004487
Model Kostaki	0,785328	0,815605	0,003626	0,003581
Model wielowykładniczy	-	1,080584	0,007041	-
8-P model Carriere'a	0,688821	0,69881	0,006161	0,007041
11-P model Carriere'a	0,301543	0,305343	0,001445	0,001189

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie zawartości tabel 1 i 2 sformułować można następujące kluczowe wnioski:

- a) Żadna z rozważanych funkcji nie ma statusu modelu najlepszego dla wszystkich lat raportowanych w tabelach 1–2
- b) Modele Carriere’a relatywnie lepiej objaśniają kształtowanie się umieralności kobiet niż mężczyzn
- c) Jeśli za wiążące uznać kryteria (19) i (20) – a zwłaszcza kryterium (20), które najczęściej jest wykorzystywane w badaniach empirycznych – to zarówno w odniesieniu do mężczyzn, jak i kobiet – daje się zaobserwować zmianę na pozycji najlepszego prawa umieralności. W przypadku mężczyzn był to w latach 90-tych model Kostaki, zaś począwszy od roku 2000 pozycję tę przejął 9-parametrowy model Heligmana-Pollarda. Supremacja tego rozkładu nad pozostałymi wydaje się umacniać, o czym świadczy fakt, że w roku 2015 model ten generuje najniższe wartości funkcji strat dla wszystkich kryteriów
- d) W odniesieniu do kobiet również następuje zmiana na pozycji lidera. Jeśli zdyskredytować 11-P model Carriere’a ze względu na przeparametryzowanie oraz brak interpretacji kluczowych parametrów tego rozkładu oraz skupić się jedynie na wskazaniach kryteriów (19) i (20), wówczas stwierdzić należy, że do roku 2005 rozkładem dominującym była 9-cio parametryczna funkcja Heligmana-Pollarda, którą dopiero w ostatnim dziesięcioleciu wyparł 8-parametryczny model Carriere’a.

Prospektywnym celem niniejszego badania jest również opracowanie prognozy demograficznej, dlatego dalszej analizie poddane zostaną jedynie 9-parametryczny model Heligmana-Pollarda (najlepsze bieżące prawo umieralności dla mężczyzn) oraz 8-parametryczny model Carriere’a dla kobiet (najlepsze prawo umieralności dla kobiet, gdyż nie wszystkie parametry wersji 11-parametrycznej posiadają interpretację, zaś sam model wydaje się przeparametryzowany).

Na rysunkach 3–4 przedstawiono dopasowanie modelu Heligmana-Pollarda do tablicowych prawdopodobieństw zgonu w roku 2015¹², odpowiednio dla wszystkich grup wieku i dla grupy wiekowej 65+ lat. Rysunki 5–6 zawierają analogiczną informację w odniesieniu do modelu Carriere’a i kobiet. Ponadto w tabeli 3 przytoczono oszacowania parametrów 9-parametrowego modelu Heligmana-Pollarda dla mężczyzn, zaś w tabeli 4 – 8-parametrowego modelu Carriere’a dla kobiet.

Na podstawie rysunków można stwierdzić, iż najlepsze – „z perspektywy wizualnej” – dopasowanie ma miejsce w przypadku zastosowania kryterium (20) (na rysunku jest to kryterium 2), zarówno dla mężczyzn (rysunek 3), jak i kobiet (rysunek 5). Zbliżone dopasowanie daje optymalizacja względem kryterium (19) (kryterium 1 na rysunkach 3 i 5), co nie dziwi w świetle uwag sformułowanych przy opisie zastosowanych kryteriów.

¹² Wybór roku 2015 nie jest przypadkowy: jest to najnowsza z dostępnych obserwacji empirycznych i w kontekście przyszłego zastosowania analizowanego modelu do celów prognostycznych – najbardziej adekwatna.

Tabela 3.

Oszacowania parametrów 9-cio parametrowego modelu Heligmana-Pollarda dla mężczyzn w roku w latach 1990–2015

Rok	Parametry								
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>K</i>
1990	0,001171	0,014358	0,13441	0,000922	14,30872	21,52977	4,63E-05	1,287643	0,788039
1991	0,001011	0,017092	0,141267	0,000907	17,82019	21,13608	5,90E-05	1,257342	0,804317
1992	0,000908	0,014556	0,133691	0,000832	16,87381	20,92495	4,49E-05	1,311817	0,772023
1993	0,000855	0,009654	0,121971	0,000736	19,08027	20,51449	3,31E-05	1,349199	0,757857
1994	0,000922	0,018371	0,133454	0,000811	19,41494	20,34671	3,75E-05	1,324991	0,767630
1995	0,000818	0,017745	0,129320	0,000676	15,61543	20,81992	3,94E-05	1,320536	0,768730
1996	0,000749	0,009888	0,111253	0,000702	16,78566	20,82895	2,76E-05	1,377591	0,746015
1997	0,000640	0,010135	0,106167	0,000784	19,07848	20,74523	2,55E-05	1,419543	0,726607
1998	0,000558	0,006371	0,098459	0,000745	17,30365	20,44067	2,22E-05	1,457308	0,712610
1999	0,000724	0,021942	0,116291	0,000755	17,68450	20,70073	2,44E-05	1,422242	0,725685
2000	0,000606	0,021115	0,116615	0,000679	18,77734	20,70212	2,07E-05	1,442489	0,719713
2001	0,000550	0,008732	0,094920	0,000632	17,69744	20,96828	1,31E-05	1,585647	0,677943
2002	0,000548	0,012346	0,101953	0,000648	14,89497	21,13334	2,03E-05	1,418418	0,729610
2003	0,000499	0,014317	0,104895	0,000612	19,60974	21,17151	2,48E-05	1,344104	0,763301
2004	0,000482	0,018141	0,109960	0,000568	16,28659	21,39559	2,12E-05	1,401094	0,736704
2005	0,000477	0,016231	0,105067	0,000643	13,99041	21,21623	1,18E-05	1,594691	0,677306
2006	0,000468	0,035362	0,127042	0,000527	20,14883	20,48596	3,75E-05	1,263002	0,803568
2007	0,000470	0,027808	0,117882	0,000599	16,20809	20,33713	1,83E-05	1,459848	0,713369
2008	0,000506	0,024499	0,108001	0,000711	15,28751	20,75003	7,30E-06	1,797032	0,636200
2009	0,000353	0,011161	0,099287	0,000719	17,06268	20,57766	1,44E-05	1,481154	0,710780
2010	0,000369	0,040634	0,129157	0,000637	16,49297	20,74308	1,91E-05	1,390044	0,742209
2011	0,000349	0,008559	0,086277	0,000703	14,17016	21,19342	5,45E-06	1,858072	0,628653
2012	0,000357	0,011047	0,090097	0,000700	13,05557	21,41910	4,56E-06	1,889705	0,626536
2013	0,000297	0,008827	0,090129	0,000665	12,72358	21,15047	8,53E-06	1,580145	0,686450
2014	0,000314	0,032896	0,117875	0,000697	14,66873	21,76740	9,40E-06	1,501699	0,709835
2015	0,000339	0,063386	0,140024	0,00058	13,11936	21,66558	1,77E-05	1,344462	0,766120

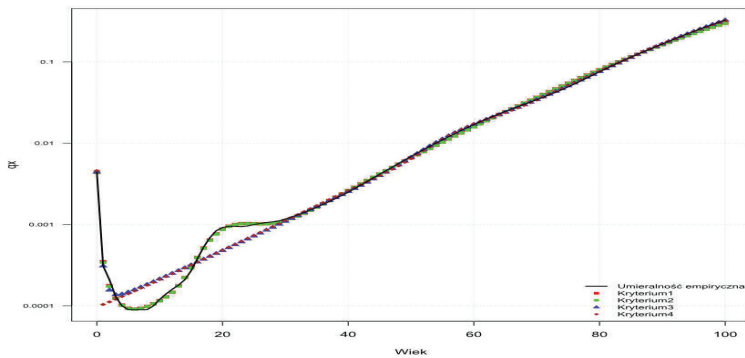
Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4.

Oszacowania parametrów 8-mio parametrowego modelu Carriere'a dla kobiet w roku
w latach 1990–2015

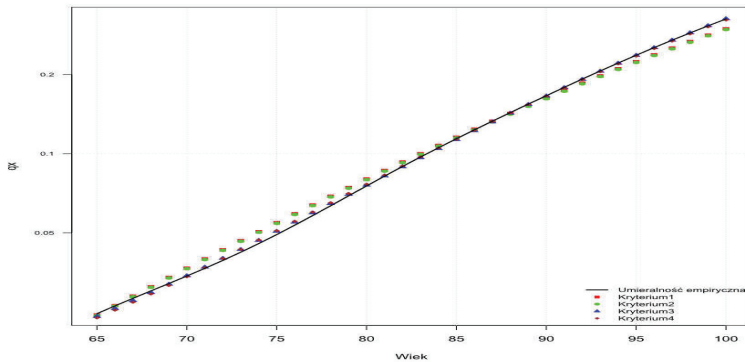
Rok	Parametry								
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	σ_1	σ_2	σ_3	m_1	m_2	m_3
1990	0,006284	0,020040	0,973676	23,54317	0,065303	9,937984	39,49321	0,034133	82,62079
1991	0,020801	0,001407	0,977792	0,873730	3,125269	10,19934	0,165718	18,32435	82,26798
1992	0,020647	0,001461	0,977892	0,508311	3,169354	10,09950	0,097254	18,67527	82,61701
1993	0,019068	0,001375	0,979557	0,813477	2,876617	9,964883	0,146072	18,34894	82,77835
1994	0,018450	0,001552	0,979998	0,690921	2,949136	9,986632	0,140337	18,21153	83,03598
1995	0,016849	0,001749	0,981402	0,525709	4,251608	10,01418	0,096306	18,12963	83,22226
1996	0,015296	0,001518	0,983185	1,745155	3,767707	9,878935	0,342272	18,23203	83,24045
1997	0,013526	0,001373	0,985101	2,869705	3,143694	9,909131	0,545161	17,77889	83,54006
1998	0,013010	0,001432	0,985558	3,012854	3,499516	9,943493	0,531072	18,70849	83,85660
1999	0,011633	0,001673	0,986694	2,057619	3,788077	9,886008	0,416764	18,88700	83,92563
2000	0,011364	0,001346	0,987290	2,068226	3,253383	9,934265	0,344099	18,37330	84,38404
2001	0,011242	0,001205	0,987553	5,377029	3,560920	9,869639	0,966155	18,01364	84,72261
2002	0,001499	0,010754	0,987747	4,110569	0,184475	9,890617	19,66729	0,04252	85,10965
2003	0,001570	0,009804	0,988626	4,366984	0,102884	9,840004	20,67120	0,021221	85,14959
2004	0,001349	0,009730	0,988921	3,542314	0,134460	9,888488	19,63000	0,027275	85,47539
2005	0,010489	0,000776	0,988735	26,49887	2,544853	9,963257	4,640287	18,28435	85,68364
2006	0,001175	0,009118	0,989707	3,967297	0,336223	9,970019	19,26306	0,073919	85,88127
2007	0,001460	0,009017	0,989523	3,973681	0,182817	9,968933	19,86091	0,034364	86,01633
2008	0,008661	0,001367	0,989972	4,589377	2,881236	9,959373	0,769787	17,56193	86,24472
2009	0,001404	0,008720	0,989875	4,450478	0,242481	9,999552	18,99831	0,044716	86,29496
2010	0,000853	0,007976	0,991171	3,221150	0,302477	9,900398	19,40710	0,057087	86,70978
2011	0,008116	0,001253	0,990631	15,87338	3,262168	9,955239	2,240453	17,03991	87,06081
2012	0,001140	0,008027	0,990833	3,460679	0,236240	9,885399	19,45551	0,030150	87,06130
2013	0,001397	0,006644	0,991959	3,636242	0,130912	9,839160	19,09117	0,027440	87,24752
2014	0,001446	0,006541	0,992013	3,884676	0,219240	9,871206	20,56991	0,048857	87,71083
2015	0,001361	0,005101	0,993538	4,189055	0,107937	9,803371	19,83886	0,033754	87,61345

Źródło: obliczenia własne.



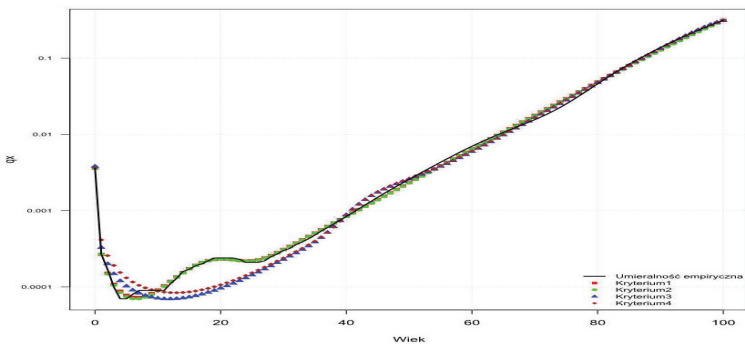
Rysunek 3. Dopasowanie 9-P modelu Heligmana-Pollarda według użytych kryteriów, dla mężczyzn w roku 2015 (skala logarytmiczna); kryteria 1–4 to odpowiednio (19)–(22)

Źródło: opracowanie własne.



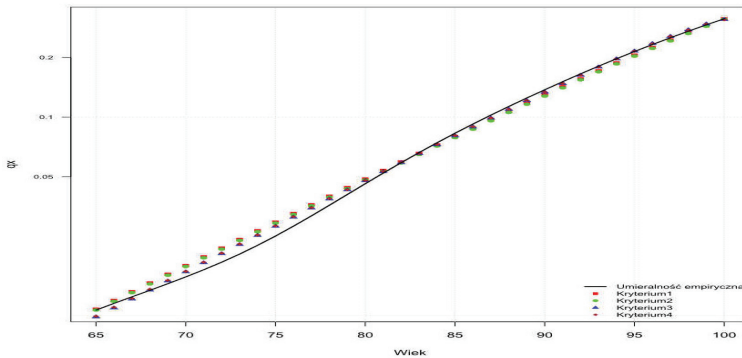
Rysunek 4. Dopasowanie 9-P modelu Heligmana-Pollarda według użytych kryteriów, dla mężczyzn w wieku 65+ lat w roku 2015 (skala logarytmiczna); kryteria 1–4 to odpowiednio (19)–(22)

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 5. Dopasowanie 8-P modelu Criere'a według użytych kryteriów, dla kobiet w roku 2015 (skala logarytmiczna); kryteria 1–4 to odpowiednio (19)–(22)

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 6. Dopasowanie 8-P modelu Carriere'a według użytych kryteriów, dla kobiet w wieku 65+ lat w roku 2015 (skala logarytmiczna); kryteria 1–4 to odpowiednio (19)–(22)

Źródło: opracowanie własne.

Z „perspektywy wizualnej” słabe dopasowanie do wartości faktycznych prawdopodobieństw zgonu otrzymane w wyniku optymalizacji analizowanych modeli względem kryterium (21) i (22) (odpowiednio 3 i 4 na rysunkach 3 i 5) może nieco zaskakiwać. Powrót do komentarzy towarzyszących formułom dla kryteriów (21) i (22), jak również przypomnienie, iż na rysunkach 3–6 mamy do czynienia ze skalą logarytmiczną, rozwiewa wszelkie wątpliwości. Na poparcie powyższego zdecydowano się na prezentację rysunków 4 i 6, gdzie wyraźnie widać, iż kryteria (21) i (22) lepiej „radzą sobie” z wysokimi prawdopodobieństwami zgonu dla osób starszych. Uzyskane wyniki są zatem zgodne z oczekiwaniami i rezultatami otrzymywanymi w innych badaniach empirycznych.

W świetle dotychczasowych rozważań i otrzymanych wyników wydaje się, iż najbardziej adekwatnymi modelami do modelowania i prognozowania umieralności w Polsce w nadchodzących latach są 9-cio parametrowy model Heligmana-Pollarda dla mężczyzn oraz 8-parametrowy model Carriere'a dla kobiet. Zwłaszcza ten drugi wniosek jest dowodem na konieczność monitorowania zmian w zachodzących rozkładach umieralności. Większość z istniejących i zbliżonych do niniejszego badań empirycznych wskazuje bowiem na supremację 9-cio parametrycznego modelu Heligmana-Pollarda w modelowaniu umieralności.

4. UWAGI KOŃCOWE

W/w modele – uzupełnione o założenia dotyczące migracji i zmian zachodzących we wzorcach i skali dzietności¹³ (np. Podrażka-Malka, 2006; Wróblewska, 2009; Florczak, 2009b) – stanowiąc będą podstawę do opracowania prognozy rozwoju demo-

¹³ Propozycję artykułu omawiającego modelowanie dzietności przy użyciu adekwatnych rozkładów złożono do innego wiodącego naukowego czasopisma polskiego.

graficznego Polski. W tym celu szeregi czasowe parametrów przedstawione w tabelach 1 i 2, po uprzednim zbadaniu ich własności statystycznych (np. Florczak, 2005) oraz merytorycznych, wynikających z nadawanej im interpretacji, staną się przedmiotem modelowania bądź przy użyciu modeli szeregów czasowych (np. McNown, Rogers, 1989, 1992), bądź modeli przyczynowo-skutkowych (np. Florczak, 2011), bądź jako złożeniu obydwu w/w podejść (Tabeau i inni, 2001).

Artykuł niniejszy jest pierwszą tak szeroką próbą zastosowania na gruncie krajowym wieloparametrycznych modeli objaśniających umieralność. W żadnym ze znanych autorom opracowania artykułów – w tym również anglojęzycznych – nie dokonano tak szerokiej analizy porównawczej tej klasy modeli dla jednego kraju. Oprócz w/w walorów artykuł zawiera kilka nowatorskich rozwiązań, do których należą dyskusja na temat zależności pomiędzy parametrami modelu Heligmana-Pollarda i Kostaki, jak również usprawnienie zastosowanych procedur numerycznych poprzez analityczne wyprowadzenie gradientów funkcji.

W świetle zachodzących współcześnie zmian w procesach społeczno-ekonomicznych, implikowanych uwarunkowaniami demograficznymi, wydaje się szczególnie ważne rozpowszechnianie i pogłębianie wiedzy w obszarze ilościowych metod modelowania i prognozowania procesów demograficznych. Artykuł niniejszy wychodzi naprzeciw tym postulatom.

LITERATURA

- Bell W. R., (1997), Modeling and Assessing Time Series Methods for Forecasting Age-Specific Mortality and Fertility Rates, *Journal of Official Statistics*, 13 (3), 279–303.
- Booth H., Tickle L., (2008), Mortality Modeling and Forecasting: A Review of Methods, *The Australian Demographic and Social Research Institute*, Working Paper 3.
- Carriere J. F., (1992), Parametric Models for Life Tables, *Transactions of the Society of Actuaries*, 44, 77–99.
- Coleman D., Rowthorn R., (2011), Who's Afraid of Population Decline? A Critical Examination of Its Consequences, w: Lee R., Reher D. S., (red.), *Demographic Transition and Its Consequences*, A supplement to volume 37, *Population and Development Review*, 217–248.
- Florczak W., (2005), Stopień integracji kluczowych zmiennych makroekonomicznych gospodarki Polski w świetle wybranych testów, *Wiadomości Statystyczne*, 11, 1–15.
- Florczak W., (2008), Efektywna podaż pracy a wzrost gospodarczy, *Gospodarka Narodowa*, 11/12, 21–46.
- Florczak W., (2009a), Makroekonomiczne uwarunkowania oczekiwanej długości życia w Polsce, *Gospodarka Narodowa*, 5–6, 61–90.
- Florczak W., (2009b), Ekonometryczny model szacowania liczby urodzeń dla Polski, *Wiadomości Statystyczne*, 6, 48–72.
- Florczak W., (2011), Produktywność czynników wzrostu PKB, *Wiadomości Statystyczne*, 2, 8–26.
- Forfar D. O., (2004), Mortality Laws, w: Teugels J. L., Sundt B., (red.), *Encyclopedia of Actuarial Science*, 1139–1145.
- Hannerz H., (2001), Manhood Trials and the Law of Mortality, *Demographic Research*, 7, 185–202.
- Heligman L., Pollard J. H., (1980), The Age Pattern of Mortality, *Journal of the Institute of Actuaries*, 107, 49–80.
- Kędziski M., Paradysz J., (2006), *Demografia*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

- Kostaki A., (1992), A Nine-Parameter Version of the Heligman-Pollard Formula, *Mathematical Population Studies*, 3 (4), 277–288.
- Kotowska I., (1999), Drugie przejście demograficzne i jego uwarunkowania, *Monografie i Opracowania SGH*, 461, 11–33.
- Kurkiewicz J., (red.), (2010), *Procesy demograficzne i metody ich analizy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Kuropka I., (1992), Application of the Heligman and Pollard Model to the Comparative Analysis of Mortality in Poland and Russia, *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, 632, 23–29.
- Kuropka I., (2009), Przydatność wybranych modeli umieralności do prognozowania natężenia zgonów w Polsce, *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, 38, 9–20.
- Lee R., Reher D. S., (red.), (2011), *Demographic Transition and Its Consequences*, A supplement to volume 37, Population and Development Review.
- McNown R., Rogers A., (1989), Forecasting Mortality: A Parameterized Time Series Approach, *Demography*, 26 (4), 645–660.
- McNown R., Rogers A., (1992), Forecasting Cause-Specific Mortality Using Time Series Methods, *International Journal of Forecasting*, 8 (3), 413–432.
- Nash J., (1990), *Compact Numerical Methods for Computers. Linear Algebra and Function Minimisation*, CRC Press, Bristol.
- Okólski M., Fihel A., (2012), *Demografia. Współczesne zjawiska i teorie*, Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa.
- Podrażka-Malka A., (2006), Przemiany umieralności w Polsce w latach 1988–2004 na tle przejścia epidemiologicznego, *Studia Demograficzne*, 2/150, 3–65.
- Preston S. H., Heuveline P., Guillot M., (2001), *Demography. Measuring and Modeling Population Processes*, Oxford: Blackwell Publishers.
- Reher D. D., (2011), Economic and Social Implications of the Demographic Transition, w: Lee R., Reher D. S., (red.), *Demographic Transition and Its Consequences*, A supplement to volume 37, Population and Development Review, 11–33.
- Rogers A., (1986), Parameterized Multistate Population Dynamics and Projections, *Journal of the American Statistical Association*, 81, 393, 48–61.
- Tabeau E., van den Berg Jeths A., Heathcote Ch., (red.), (2001), Forecasting Mortality in Developed Countries, *European Studies of Population*, 9, Kluwer Academic Publishers.
- Wróblewska W., (2009), Teoria przejścia epidemiologicznego oraz fakty na przełomie wieków w Polsce, *Studia Demograficzne*, 1/155, 110–159.

MODELOWANIE UMIERALNOŚCI W POLSCE PRZY UŻYCIU FUNKCJI WIELOPARAMETRYCZNYCH

Streszczenie

W świetle zachodzących współcześnie zmian w procesach społeczno-ekonomicznych, implikowanych uwarunkowaniami demograficznymi, jest szczególnie ważne rozpowszechnianie i pogłębianie wiedzy w obszarze ilościowych metod modelowania i prognozowania procesów demograficznych. W artykule przeprowadzono analizę umieralności w Polsce – oddzielnie dla mężczyzn i kobiet – w latach 1990–2015 przy użyciu funkcji wieloparametrycznych dla wszystkich grup wieku. Rozważano sześć współczesnych praw umieralności: 8-parametrowy model Heligmana-Pollarda, 9-parametrowy model Heligmana-Pollarda, 9-parametrowy model Kostaki, model wielowykładniczy, 8-parametrowy model Carriere'a oraz 11-parametrowy model Carriere'a. Parametry w/w modeli oszacowano przy użyciu stosownych metod numerycznych w środowisku programu R, dokonując optymalizacji względem czterech

kryteriów. Uzyskane wyniki wskazują, iż w analizowanym okresie nastąpiły zmiany we wzorcach umieralności. Obecnie najlepszymi modelami dla wszystkich grup wieku jest dla mężczyzn 9-parametrowy model Heligmana-Pollarda, zaś dla kobiet – 8-parametrowy model Carriere’a.

Słowa kluczowe: wieloparametryczne modele umieralności demometria, analiza aktuarialna, metody numeryczne, prognozowanie

MODELING MORTALITY IN POLAND
BY MEANS OF MULTI-PARAMETER MORTALITY LAWS FOR WHOLE LIFE SPAN

A b s t r a c t

In view of the contemporary changes in socio-economic processes implied by demographic conditions, it seems advisable to disseminate and deepen quantitative methods of modeling and forecasting demographic processes. This article deals with mortality analysis in Poland, of both males and females, in the years 1990–2015 by means of mortality laws covering the whole life span. Six models were investigated: 8-parameter Heligman-Pollard model, 9-parameter Heligman-Pollard model, Kostaki model, multixponential model, and finally 8- and 11-parameter Carriere models. The parameters of the models were estimated in R environment using numerical methods minimizing four different objective functions. The outcomes show that in the period under consideration some changes in the mortality patterns occurred. Now it is the 9-parameter Heligman-Pollard model for males and the 8-parameter Carriere model for females that seem best suited to model mortality in Poland.

Keywords: multi-parameter mortality models of whole life span, demometrics, actuarial analysis, numerical methods, forecasting